

## 正多面体群のPSU(2)における構成(II)

著者名(日)	北川 正一
雑誌名	教養研究
巻	17
号	3
ページ	17-45
発行年	2011-03
URL	<a href="http://id.nii.ac.jp/1265/00000345/">http://id.nii.ac.jp/1265/00000345/</a>

# 正多面体群の $PSU(2)$ における構成 (II)

北 川 正 一

## 1 正多面体群と $PSU(2)$

3次元空間における正多面体群は、回転群  $SO(3)$  の有限部分群として捉えることができ、 $S^2 \cong P^1(\mathbb{C})$  の同一視に対応して  $PSU(2)$  の中に表現される。正4面体群、正8面体群については、すでにその表示を求めて特徴付けを行った ([3])。本論文では、正20面体群について取り上げる。

### 1.1 $PSU(2)$ の元の表示

[3] で見たように、 $SO(3)$  の回転は  $Aut(P^1(\mathbb{C}))$  の中では  $PSU(2)$  の元に対応し、回転角を  $\theta$ 、固定点を  $z_0 \in \mathbb{C}$  とするとき、

$$\frac{1}{1+|z_0|^2} \begin{bmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{bmatrix} \in PSU(2)$$

ただし、 $u = e^{\theta/2\sqrt{-1}}(1 + e^{-\theta\sqrt{-1}}|z_0|^2)$ 、 $v = -z_0(e^{\theta/2\sqrt{-1}} - e^{-\theta/2\sqrt{-1}})$  と表示される。

## 2 $PSU(2)$ における正 20 面体群の表示

以下, 黄金比の定数  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  を  $\tau$  と表記する。

$\mathbb{R}^3$  内に正 20 面体の頂点を  $(\pm 1, \pm \tau, 0)$ ,  $(0, \pm 1, \pm \tau)$ ,  $(\pm \tau, 0, \pm 1)$  と取り, その合同変換群として  $SO(3)$  に正 20 面体群を表現する。その状況下で  $S^2 \cong P^1(\mathbb{C})$  の対応をもとに [3] と同様にして,  $p: SO(3) \rightarrow PSU(2)$  により表示を求める。

### 2.1 $SO(3)$ における表示

$SO(3)$  における正 20 面体群  $\mathcal{I}$  の表示を提示する ([2])。位数, 半径  $r=1$  の  $S^2$  上の固定点を併記する。左端の記号は [2] における表記に従う。

変換	行 列	位数	固 定 点
$e:$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	1	
$p_{[1:\tau:0]}:$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \tau^{-1} & \tau \\ \tau^{-1} & \tau & -1 \\ -\tau & 1 & \tau^{-1} \end{pmatrix}$	5	$\pm \frac{1}{\sqrt{2+\tau}} \begin{pmatrix} 1 \\ \tau \\ 0 \end{pmatrix}$
$p_{[1:\tau:0]}^2:$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau^{-1} & \tau & 1 \\ \tau & 1 & -\tau^{-1} \\ -1 & \tau^{-1} & -\tau \end{pmatrix}$	5	$\pm \frac{1}{\sqrt{2+\tau}} \begin{pmatrix} 1 \\ \tau \\ 0 \end{pmatrix}$
$p_{[1:\tau:0]}^{-2}:$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau^{-1} & \tau & -1 \\ \tau & 1 & \tau^{-1} \\ 1 & -\tau^{-1} & -\tau \end{pmatrix}$	5	$\pm \frac{1}{\sqrt{2+\tau}} \begin{pmatrix} 1 \\ \tau \\ 0 \end{pmatrix}$
$p_{[1:\tau:0]}^{-1}:$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \tau^{-1} & -\tau \\ \tau^{-1} & \tau & 1 \\ \tau & -1 & \tau^{-1} \end{pmatrix}$	5	$\pm \frac{1}{\sqrt{2+\tau}} \begin{pmatrix} 1 \\ \tau \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{llll}
p_{[1:-\tau:0]} : & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\tau^{-1} & -\tau \\ -\tau^{-1} & \tau & -1 \\ \tau & 1 & \tau^{-1} \end{pmatrix} & 5 & \pm \frac{1}{\sqrt{2+\tau}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\tau \\ 0 \end{pmatrix} \\
p_{[1:-\tau:0]}^2 : & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau^{-1} & -\tau & -1 \\ -\tau & 1 & -\tau^{-1} \\ 1 & \tau^{-1} & -\tau \end{pmatrix} & 5 & \pm \frac{1}{\sqrt{2+\tau}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\tau \\ 0 \end{pmatrix} \\
p_{[1:-\tau:0]}^{-2} : & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau^{-1} & -\tau & 1 \\ -\tau & 1 & \tau^{-1} \\ -1 & -\tau^{-1} & -\tau \end{pmatrix} & 5 & \pm \frac{1}{\sqrt{2+\tau}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\tau \\ 0 \end{pmatrix} \\
p_{[1:-\tau:0]}^{-1} : & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\tau^{-1} & \tau \\ -\tau^{-1} & \tau & 1 \\ -\tau & -1 & \tau^{-1} \end{pmatrix} & 5 & \pm \frac{1}{\sqrt{2+\tau}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\tau \\ 0 \end{pmatrix} \\
p_{[0:1:\tau]} : & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau^{-1} & -\tau & 1 \\ \tau & 1 & \tau^{-1} \\ -1 & \tau^{-1} & \tau \end{pmatrix} & 5 & \pm \frac{1}{\sqrt{2+\tau}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \tau \end{pmatrix} \\
p_{[0:1:\tau]}^2 : & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau & -1 & \tau^{-1} \\ 1 & -\tau^{-1} & \tau \\ -\tau^{-1} & \tau & 1 \end{pmatrix} & 5 & \pm \frac{1}{\sqrt{2+\tau}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \tau \end{pmatrix} \\
p_{[0:1:\tau]}^{-2} : & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau & 1 & -\tau^{-1} \\ -1 & -\tau^{-1} & \tau \\ \tau^{-1} & \tau & 1 \end{pmatrix} & 5 & \pm \frac{1}{\sqrt{2+\tau}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \tau \end{pmatrix} \\
p_{[0:1:\tau]}^{-1} : & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau^{-1} & \tau & -1 \\ -\tau & 1 & \tau^{-1} \\ 1 & \tau^{-1} & \tau \end{pmatrix} & 5 & \pm \frac{1}{\sqrt{2+\tau}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \tau \end{pmatrix} \\
p_{[0:1:-\tau]} : & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau^{-1} & -\tau & -1 \\ \tau & 1 & -\tau^{-1} \\ 1 & -\tau^{-1} & \tau \end{pmatrix} & 5 & \pm \frac{1}{\sqrt{2+\tau}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\tau \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 p_{[0:1:-\tau]}^2 : & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau & -1 & -\tau^{-1} \\ 1 & -\tau^{-1} & -\tau \\ \tau^{-1} & -\tau & 1 \end{pmatrix} & 5 & \pm \frac{1}{\sqrt{2+\tau}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\tau \end{pmatrix} \\
 p_{[0:1:-\tau]}^{-2} : & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau & 1 & \tau^{-1} \\ -1 & -\tau^{-1} & -\tau \\ -\tau^{-1} & -\tau & 1 \end{pmatrix} & 5 & \pm \frac{1}{\sqrt{2+\tau}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\tau \end{pmatrix} \\
 p_{[0:1:-\tau]}^{-1} : & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau^{-1} & \tau & 1 \\ -\tau & 1 & -\tau^{-1} \\ -1 & -\tau^{-1} & \tau \end{pmatrix} & 5 & \pm \frac{1}{\sqrt{2+\tau}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\tau \end{pmatrix} \\
 p_{[\tau:0:1]} : & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau & -1 & \tau^{-1} \\ 1 & \tau^{-1} & -\tau \\ \tau^{-1} & \tau & 1 \end{pmatrix} & 5 & \pm \frac{1}{\sqrt{2+\tau}} \begin{pmatrix} \tau \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 p_{[\tau:0:1]}^2 : & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\tau^{-1} & \tau \\ \tau^{-1} & -\tau & -1 \\ \tau & 1 & -\tau^{-1} \end{pmatrix} & 5 & \pm \frac{1}{\sqrt{2+\tau}} \begin{pmatrix} \tau \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 p_{[\tau:0:1]}^{-2} : & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \tau^{-1} & \tau \\ -\tau^{-1} & -\tau & 1 \\ \tau & -1 & -\tau^{-1} \end{pmatrix} & 5 & \pm \frac{1}{\sqrt{2+\tau}} \begin{pmatrix} \tau \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 p_{[\tau:0:1]}^{-1} : & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau & 1 & \tau^{-1} \\ -1 & \tau^{-1} & \tau \\ \tau^{-1} & -\tau & 1 \end{pmatrix} & 5 & \pm \frac{1}{\sqrt{2+\tau}} \begin{pmatrix} \tau \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 p_{[-\tau:0:1]} : & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau & -1 & -\tau^{-1} \\ 1 & \tau^{-1} & \tau \\ -\tau^{-1} & -\tau & 1 \end{pmatrix} & 5 & \pm \frac{1}{\sqrt{2+\tau}} \begin{pmatrix} -\tau \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 p_{[-\tau:0:1]}^2 : & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\tau^{-1} & -\tau \\ \tau^{-1} & -\tau & 1 \\ -\tau & -1 & -\tau^{-1} \end{pmatrix} & 5 & \pm \frac{1}{\sqrt{2+\tau}} \begin{pmatrix} -\tau \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
p_{[-\tau;0;1]}^{-2} : & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \tau^{-1} & -\tau \\ -\tau^{-1} & -\tau & -1 \\ -\tau & 1 & -\tau^{-1} \end{pmatrix} & 5 \quad \pm \frac{1}{\sqrt{2+\tau}} \begin{pmatrix} -\tau \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
p_{[-\tau;0;1]}^{-1} : & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau & 1 & -\tau^{-1} \\ -1 & \tau^{-1} & -\tau \\ -\tau^{-1} & \tau & 1 \end{pmatrix} & 5 \quad \pm \frac{1}{\sqrt{2+\tau}} \begin{pmatrix} -\tau \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
h_{[1;0;0]} : & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & 2 \quad \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
h_{[0;1;0]} : & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & 2 \quad \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
h_{[0;0;1]} : & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & 2 \quad \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
h_{[1;\tau^{-1};\tau]} : & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \tau^{-1} & \tau \\ \tau^{-1} & -\tau & 1 \\ \tau & 1 & \tau^{-1} \end{pmatrix} & 2 \quad \pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \tau^{-1} \\ \tau \end{pmatrix} \\
h_{[1;\tau^{-1};-\tau]} : & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \tau^{-1} & -\tau \\ \tau^{-1} & -\tau & -1 \\ -\tau & -1 & \tau^{-1} \end{pmatrix} & 2 \quad \pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \tau^{-1} \\ -\tau \end{pmatrix} \\
h_{[1;-\tau^{-1};-\tau]} : & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\tau^{-1} & -\tau \\ -\tau^{-1} & -\tau & 1 \\ -\tau & 1 & \tau^{-1} \end{pmatrix} & 2 \quad \pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\tau^{-1} \\ -\tau \end{pmatrix} \\
h_{[1;-\tau^{-1};\tau]} : & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\tau^{-1} & \tau \\ -\tau^{-1} & -\tau & -1 \\ \tau & -1 & \tau^{-1} \end{pmatrix} & 2 \quad \pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\tau^{-1} \\ \tau \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 h_{[\tau, 1; \tau^{-1}]} : \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau^{-1} & \tau & 1 \\ \tau & -1 & \tau^{-1} \\ 1 & \tau^{-1} & -\tau \end{pmatrix} & 2 \quad \pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \\ \tau^{-1} \end{pmatrix} \\
 h_{[\tau, 1; -\tau^{-1}]} : \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau^{-1} & \tau & -1 \\ \tau & -1 & -\tau^{-1} \\ -1 & -\tau^{-1} & -\tau \end{pmatrix} & 2 \quad \pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \\ -\tau^{-1} \end{pmatrix} \\
 h_{[-\tau, 1; \tau^{-1}]} : \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau^{-1} & -\tau & -1 \\ -\tau & -1 & \tau^{-1} \\ -1 & \tau^{-1} & -\tau \end{pmatrix} & 2 \quad \pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau \\ 1 \\ \tau^{-1} \end{pmatrix} \\
 h_{[-\tau, 1; -\tau^{-1}]} : \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau^{-1} & -\tau & 1 \\ -\tau & -1 & -\tau^{-1} \\ 1 & -\tau^{-1} & -\tau \end{pmatrix} & 2 \quad \pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau \\ 1 \\ -\tau^{-1} \end{pmatrix} \\
 h_{[\tau^{-1}, \tau; 1]} : \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau & 1 & \tau^{-1} \\ 1 & \tau^{-1} & \tau \\ \tau^{-1} & \tau & -1 \end{pmatrix} & 2 \quad \pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau^{-1} \\ \tau \\ 1 \end{pmatrix} \\
 h_{[-\tau^{-1}, -\tau; 1]} : \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau & 1 & -\tau^{-1} \\ 1 & \tau^{-1} & -\tau \\ -\tau^{-1} & -\tau & -1 \end{pmatrix} & 2 \quad \pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau^{-1} \\ -\tau \\ 1 \end{pmatrix} \\
 h_{[-\tau^{-1}, \tau; 1]} : \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau & -1 & -\tau^{-1} \\ -1 & \tau^{-1} & \tau \\ -\tau^{-1} & \tau & -1 \end{pmatrix} & 2 \quad \pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau^{-1} \\ \tau \\ 1 \end{pmatrix} \\
 h_{[\tau^{-1}, -\tau; 1]} : \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau & -1 & \tau^{-1} \\ -1 & \tau^{-1} & -\tau \\ \tau^{-1} & -\tau & -1 \end{pmatrix} & 2 \quad \pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau^{-1} \\ -\tau \\ 1 \end{pmatrix} \\
 w_{[1; 1; 1]} : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & 3 \quad \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
w_{[1:1:1]}^{-1} : & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & 3 \quad \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
w_{[1:1:-1]} : & \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} & 3 \quad \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
w_{[1:1:-1]}^{-1} : & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & 3 \quad \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
w_{[1:-1:-1]} : & \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & 3 \quad \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
w_{[1:-1:-1]}^{-1} : & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & 3 \quad \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
w_{[1:-1:1]} : & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} & 3 \quad \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
w_{[1:-1:1]}^{-1} : & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & 3 \quad \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
w_{[0:\tau:\tau^{-1}]} : & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\tau^{-1} & \tau \\ \tau^{-1} & \tau & 1 \\ -\tau & 1 & -\tau^{-1} \end{pmatrix} & 3 \quad \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ \tau \\ \tau^{-1} \end{pmatrix} \\
w_{[0:\tau:\tau^{-1}]}^{-1} : & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \tau^{-1} & -\tau \\ -\tau^{-1} & \tau & 1 \\ \tau & 1 & -\tau^{-1} \end{pmatrix} & 3 \quad \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ \tau \\ \tau^{-1} \end{pmatrix}
\end{array}$$



$$\begin{array}{ll}
 w_{[0;\tau;-\tau^{-1}]} : \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\tau^{-1} & -\tau \\ \tau^{-1} & \tau & -1 \\ \tau & -1 & -\tau^{-1} \end{pmatrix} & 3 \quad \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ \tau \\ -\tau^{-1} \end{pmatrix} \\
 w_{[0;\tau;-\tau^{-1}]}^{-1} : \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \tau^{-1} & \tau \\ -\tau^{-1} & \tau & -1 \\ -\tau & -1 & -\tau^{-1} \end{pmatrix} & 3 \quad \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ \tau \\ -\tau^{-1} \end{pmatrix} \\
 w_{[\tau^{-1};0;\tau]} : \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau^{-1} & -\tau & 1 \\ \tau & -1 & -\tau^{-1} \\ 1 & \tau^{-1} & \tau \end{pmatrix} & 3 \quad \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \tau^{-1} \\ 0 \\ \tau \end{pmatrix} \\
 w_{[\tau^{-1};0;\tau]}^{-1} : \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau^{-1} & \tau & 1 \\ -\tau & -1 & \tau^{-1} \\ 1 & -\tau^{-1} & \tau \end{pmatrix} & 3 \quad \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \tau^{-1} \\ 0 \\ \tau \end{pmatrix} \\
 w_{[-\tau^{-1};0;\tau]} : \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau^{-1} & -\tau & -1 \\ \tau & -1 & \tau^{-1} \\ -1 & -\tau^{-1} & \tau \end{pmatrix} & 3 \quad \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\tau^{-1} \\ 0 \\ \tau \end{pmatrix} \\
 w_{[-\tau^{-1};0;\tau]}^{-1} : \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau^{-1} & \tau & -1 \\ -\tau & -1 & -\tau^{-1} \\ -1 & \tau^{-1} & \tau \end{pmatrix} & 3 \quad \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\tau^{-1} \\ 0 \\ \tau \end{pmatrix} \\
 w_{[\tau;\tau^{-1};0]} : \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau & 1 & \tau^{-1} \\ 1 & -\tau^{-1} & -\tau \\ -\tau^{-1} & \tau & -1 \end{pmatrix} & 3 \quad \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \tau \\ \tau^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \\
 w_{[\tau;\tau^{-1};0]}^{-1} : \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau & 1 & -\tau^{-1} \\ 1 & -\tau^{-1} & \tau \\ \tau^{-1} & -\tau & -1 \end{pmatrix} & 3 \quad \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \tau \\ \tau^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \\
 w_{[\tau;-\tau^{-1};0]} : \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau & -1 & -\tau^{-1} \\ -1 & -\tau^{-1} & -\tau \\ \tau^{-1} & \tau & -1 \end{pmatrix} & 3 \quad \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \tau \\ -\tau^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

$$w_{[\tau:-\tau^{-1};0]}^{-1} : \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau & -1 & \tau^{-1} \\ -1 & -\tau^{-1} & \tau \\ -\tau^{-1} & -\tau & -1 \end{pmatrix} \quad 3 \quad \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \tau \\ -\tau^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

## 2.2 $PSU(2)$ における正 20 面体群の表示

以上の準備をもとに, 正 20 面体群の各回転の  $PSU(2)$  における表示を求める.  $\mathbb{C}$  における固定点は前節の固定点の立体射影による像として定められ, 回転角は変換の位数より得られる.

$$\begin{array}{ll}
 c : & \begin{matrix} SO(3) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} & \leftrightarrow & \begin{matrix} PSU(2) \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \\
 p_{[1:\tau;0]} : & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \tau^{-1} & \tau \\ \tau^{-1} & \tau & -1 \\ -\tau & 1 & \tau^{-1} \end{pmatrix} & \leftrightarrow & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau & 1 - \tau^{-1}\sqrt{-1} \\ -1 - \tau^{-1}\sqrt{-1} & \tau \end{bmatrix} \\
 p_{[1:\tau;0]}^2 : & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau^{-1} & \tau & 1 \\ \tau & 1 & -\tau^{-1} \\ -1 & \tau^{-1} & -\tau \end{pmatrix} & \leftrightarrow & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau^{-1} & \tau - \sqrt{-1} \\ -\tau - \sqrt{-1} & \tau^{-1} \end{bmatrix} \\
 p_{[1:\tau;0]}^{-2} : & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau^{-1} & \tau & -1 \\ \tau & 1 & \tau^{-1} \\ 1 & -\tau^{-1} & -\tau \end{pmatrix} & \leftrightarrow & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau^{-1} & -\tau + \sqrt{-1} \\ \tau + \sqrt{-1} & \tau^{-1} \end{bmatrix} \\
 p_{[1:\tau;0]}^{-1} : & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \tau^{-1} & -\tau \\ \tau^{-1} & \tau & 1 \\ \tau & -1 & \tau^{-1} \end{pmatrix} & \leftrightarrow & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau & -1 + \tau^{-1}\sqrt{-1} \\ 1 + \tau^{-1}\sqrt{-1} & \tau \end{bmatrix} \\
 p_{[1:-\tau;0]} : & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\tau^{-1} & -\tau \\ -\tau^{-1} & \tau & -1 \\ \tau & 1 & \tau^{-1} \end{pmatrix} & \leftrightarrow & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau & -1 - \tau^{-1}\sqrt{-1} \\ 1 - \tau^{-1}\sqrt{-1} & \tau \end{bmatrix}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 p_{[1:-\tau:0]}^2 &: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau^{-1} & -\tau & -1 \\ -\tau & 1 & -\tau^{-1} \\ 1 & \tau^{-1} & -\tau \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau^{-1} & -\tau - \sqrt{-1} \\ \tau - \sqrt{-1} & \tau^{-1} \end{bmatrix} \\
 p_{[1:-\tau:0]}^{-2} &: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau^{-1} & -\tau & 1 \\ -\tau & 1 & \tau^{-1} \\ -1 & -\tau^{-1} & -\tau \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau^{-1} & \tau + \sqrt{-1} \\ -\tau + \sqrt{-1} & \tau^{-1} \end{bmatrix} \\
 p_{[1:-\tau:0]}^{-1} &: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\tau^{-1} & \tau \\ -\tau^{-1} & \tau & 1 \\ -\tau & -1 & \tau^{-1} \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau & 1 + \tau^{-1}\sqrt{-1} \\ -1 + \tau^{-1}\sqrt{-1} & \tau \end{bmatrix} \\
 p_{[0:1:\tau]} &: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau^{-1} & -\tau & 1 \\ \tau & 1 & \tau^{-1} \\ -1 & \tau^{-1} & \tau \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau - \sqrt{-1} & \tau^{-1} \\ -\tau^{-1} & \tau + \sqrt{-1} \end{bmatrix} \\
 p_{[0:1:\tau]}^2 &: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau & -1 & \tau^{-1} \\ 1 & -\tau^{-1} & \tau \\ -\tau^{-1} & \tau & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau^{-1} - \tau\sqrt{-1} & 1 \\ -1 & \tau^{-1} + \tau\sqrt{-1} \end{bmatrix} \\
 p_{[0:1:\tau]}^{-2} &: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau & 1 & -\tau^{-1} \\ -1 & -\tau^{-1} & \tau \\ \tau^{-1} & \tau & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau^{-1} + \tau\sqrt{-1} & -1 \\ 1 & \tau^{-1} - \tau\sqrt{-1} \end{bmatrix} \\
 p_{[0:1:\tau]}^{-1} &: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau^{-1} & \tau & -1 \\ -\tau & 1 & \tau^{-1} \\ 1 & \tau^{-1} & \tau \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau + \sqrt{-1} & -\tau^{-1} \\ \tau^{-1} & \tau - \sqrt{-1} \end{bmatrix} \\
 p_{[0:1:-\tau]} &: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau^{-1} & -\tau & -1 \\ \tau & 1 & -\tau^{-1} \\ 1 & -\tau^{-1} & \tau \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau + \sqrt{-1} & \tau^{-1} \\ -\tau^{-1} & \tau - \sqrt{-1} \end{bmatrix} \\
 p_{[0:1:-\tau]}^2 &: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau & -1 & -\tau^{-1} \\ 1 & -\tau^{-1} & -\tau \\ \tau^{-1} & -\tau & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau^{-1} + \tau\sqrt{-1} & 1 \\ -1 & \tau^{-1} - \tau\sqrt{-1} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{[0:1:-\tau]}^{-2} &: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau & 1 & \tau^{-1} \\ -1 & -\tau^{-1} & -\tau \\ -\tau^{-1} & -\tau & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau^{-1} - \tau\sqrt{-1} & -1 \\ 1 & \tau^{-1} + \tau\sqrt{-1} \end{bmatrix} \\
p_{[0:1:-\tau]}^{-1} &: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau^{-1} & \tau & 1 \\ -\tau & 1 & -\tau^{-1} \\ -1 & -\tau^{-1} & \tau \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau - \sqrt{-1} & -\tau^{-1} \\ \tau^{-1} & \tau + \sqrt{-1} \end{bmatrix} \\
p_{[\tau:0:1]} &: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau & -1 & \tau^{-1} \\ 1 & \tau^{-1} & -\tau \\ \tau^{-1} & \tau & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau - \tau^{-1}\sqrt{-1} & -\sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & \tau + \tau^{-1}\sqrt{-1} \end{bmatrix} \\
p_{[\tau:0:1]}^2 &: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\tau^{-1} & \tau \\ \tau^{-1} & -\tau & -1 \\ \tau & 1 & -\tau^{-1} \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau^{-1} - \sqrt{-1} & -\tau\sqrt{-1} \\ -\tau\sqrt{-1} & \tau^{-1} + \sqrt{-1} \end{bmatrix} \\
p_{[\tau:0:1]}^{-2} &: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \tau^{-1} & \tau \\ -\tau^{-1} & -\tau & 1 \\ \tau & -1 & -\tau^{-1} \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau^{-1} + \sqrt{-1} & \tau\sqrt{-1} \\ \tau\sqrt{-1} & \tau^{-1} - \sqrt{-1} \end{bmatrix} \\
p_{[\tau:0:1]}^{-1} &: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau & 1 & \tau^{-1} \\ -1 & \tau^{-1} & \tau \\ \tau^{-1} & -\tau & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau + \tau^{-1}\sqrt{-1} & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & \tau - \tau^{-1}\sqrt{-1} \end{bmatrix} \\
p_{[-\tau:0:1]} &: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau & -1 & -\tau^{-1} \\ 1 & \tau^{-1} & \tau \\ -\tau^{-1} & -\tau & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau - \tau^{-1}\sqrt{-1} & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & \tau + \tau^{-1}\sqrt{-1} \end{bmatrix} \\
p_{[-\tau:0:1]}^2 &: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\tau^{-1} & -\tau \\ \tau^{-1} & -\tau & 1 \\ -\tau & -1 & -\tau^{-1} \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau^{-1} - \sqrt{-1} & \tau\sqrt{-1} \\ \tau\sqrt{-1} & \tau^{-1} + \sqrt{-1} \end{bmatrix} \\
p_{[-\tau:0:1]}^{-2} &: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \tau^{-1} & -\tau \\ -\tau^{-1} & -\tau & -1 \\ -\tau & 1 & -\tau^{-1} \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau^{-1} + \sqrt{-1} & -\tau\sqrt{-1} \\ -\tau\sqrt{-1} & \tau^{-1} - \sqrt{-1} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_{[-\tau, 0; 1]}^{-1} &: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau & 1 & -\tau^{-1} \\ -1 & \tau^{-1} & -\tau \\ -\tau^{-1} & \tau & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau + \tau^{-1}\sqrt{-1} & -\sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & \tau - \tau^{-1}\sqrt{-1} \end{bmatrix} \\
 h_{[1; 0; 0]} &: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{bmatrix} \\
 h_{[0; 1; 0]} &: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\
 h_{[0; 0; 1]} &: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{bmatrix} \\
 h_{[1; \tau^{-1}; \tau]} &: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \tau^{-1} & \tau \\ \tau^{-1} & -\tau & 1 \\ \tau & 1 & \tau^{-1} \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\tau\sqrt{-1} & \tau^{-1} - \sqrt{-1} \\ -\tau^{-1} - \sqrt{-1} & \tau\sqrt{-1} \end{bmatrix} \\
 h_{[1; \tau^{-1}; -\tau]} &: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \tau^{-1} & -\tau \\ \tau^{-1} & -\tau & -1 \\ -\tau & -1 & \tau^{-1} \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\tau\sqrt{-1} & -\tau^{-1} + \sqrt{-1} \\ \tau^{-1} + \sqrt{-1} & \tau\sqrt{-1} \end{bmatrix} \\
 h_{[1; -\tau^{-1}; -\tau]} &: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\tau^{-1} & -\tau \\ -\tau^{-1} & -\tau & 1 \\ -\tau & 1 & \tau^{-1} \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\tau\sqrt{-1} & \tau^{-1} + \sqrt{-1} \\ -\tau^{-1} + \sqrt{-1} & \tau\sqrt{-1} \end{bmatrix} \\
 h_{[1; -\tau^{-1}; \tau]} &: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\tau^{-1} & \tau \\ -\tau^{-1} & -\tau & -1 \\ \tau & -1 & \tau^{-1} \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\tau\sqrt{-1} & -\tau^{-1} - \sqrt{-1} \\ \tau^{-1} - \sqrt{-1} & \tau\sqrt{-1} \end{bmatrix} \\
 h_{[\tau; 1; \tau^{-1}]} &: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau^{-1} & \tau & 1 \\ \tau & -1 & \tau^{-1} \\ 1 & \tau^{-1} & -\tau \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau^{-1}\sqrt{-1} & -1 + \tau\sqrt{-1} \\ 1 + \tau\sqrt{-1} & -\tau^{-1}\sqrt{-1} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{[\tau;1;-\tau^{-1}]} &: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau^{-1} & \tau & -1 \\ \tau & -1 & -\tau^{-1} \\ -1 & -\tau^{-1} & -\tau \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau^{-1}\sqrt{-1} & 1-\tau\sqrt{-1} \\ -1-\tau\sqrt{-1} & -\tau^{-1}\sqrt{-1} \end{bmatrix} \\
h_{[-\tau;1;\tau^{-1}]} &: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau^{-1} & -\tau & -1 \\ -\tau & -1 & \tau^{-1} \\ -1 & \tau^{-1} & -\tau \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau^{-1}\sqrt{-1} & -1-\tau\sqrt{-1} \\ 1-\tau\sqrt{-1} & -\tau^{-1}\sqrt{-1} \end{bmatrix} \\
h_{[-\tau;1;-\tau^{-1}]} &: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau^{-1} & -\tau & 1 \\ -\tau & -1 & -\tau^{-1} \\ 1 & -\tau^{-1} & -\tau \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau^{-1}\sqrt{-1} & 1+\tau\sqrt{-1} \\ -1+\tau\sqrt{-1} & -\tau^{-1}\sqrt{-1} \end{bmatrix} \\
h_{[\tau^{-1};\tau;1]} &: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau & 1 & \tau^{-1} \\ 1 & \tau^{-1} & \tau \\ \tau^{-1} & \tau & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\sqrt{-1} & \tau-\tau^{-1}\sqrt{-1} \\ -\tau-\tau^{-1}\sqrt{-1} & \sqrt{-1} \end{bmatrix} \\
h_{[-\tau^{-1};-\tau;1]} &: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau & 1 & -\tau^{-1} \\ 1 & \tau^{-1} & -\tau \\ -\tau^{-1} & -\tau & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\sqrt{-1} & -\tau+\tau^{-1}\sqrt{-1} \\ \tau+\tau^{-1}\sqrt{-1} & \sqrt{-1} \end{bmatrix} \\
h_{[-\tau^{-1};\tau;1]} &: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau & -1 & -\tau^{-1} \\ -1 & \tau^{-1} & \tau \\ -\tau^{-1} & \tau & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\sqrt{-1} & \tau+\tau^{-1}\sqrt{-1} \\ -\tau+\tau^{-1}\sqrt{-1} & \sqrt{-1} \end{bmatrix} \\
h_{[\tau^{-1};-\tau;1]} &: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau & -1 & \tau^{-1} \\ -1 & \tau^{-1} & -\tau \\ \tau^{-1} & -\tau & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\sqrt{-1} & -\tau-\tau^{-1}\sqrt{-1} \\ \tau-\tau^{-1}\sqrt{-1} & \sqrt{-1} \end{bmatrix} \\
w_{[1;1;1]} &: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-\sqrt{-1} & 1-\sqrt{-1} \\ -1-\sqrt{-1} & 1+\sqrt{-1} \end{bmatrix} \\
w_{[1;1;1]}^{-1} &: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+\sqrt{-1} & -1+\sqrt{-1} \\ 1+\sqrt{-1} & 1-\sqrt{-1} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_{[1:1:-1]} &: \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \leftrightarrow & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{-1} & -1 + \sqrt{-1} \\ 1 + \sqrt{-1} & 1 + \sqrt{-1} \end{bmatrix} \\
 w_{[1:1:-1]}^{-1} &: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \leftrightarrow & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{-1} & 1 - \sqrt{-1} \\ -1 - \sqrt{-1} & 1 - \sqrt{-1} \end{bmatrix} \\
 w_{[1:-1:-1]} &: \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \leftrightarrow & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{-1} & -1 - \sqrt{-1} \\ 1 - \sqrt{-1} & 1 - \sqrt{-1} \end{bmatrix} \\
 w_{[1:-1:-1]}^{-1} &: \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \leftrightarrow & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{-1} & 1 + \sqrt{-1} \\ -1 + \sqrt{-1} & 1 + \sqrt{-1} \end{bmatrix} \\
 w_{[1:-1:1]} &: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \leftrightarrow & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{-1} & 1 + \sqrt{-1} \\ -1 + \sqrt{-1} & 1 - \sqrt{-1} \end{bmatrix} \\
 w_{[1:-1:1]}^{-1} &: \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \leftrightarrow & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{-1} & -1 - \sqrt{-1} \\ 1 - \sqrt{-1} & 1 + \sqrt{-1} \end{bmatrix} \\
 w_{[0:\tau:\tau^{-1}]} &: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\tau^{-1} & \tau \\ \tau^{-1} & \tau & 1 \\ -\tau & 1 & -\tau^{-1} \end{pmatrix} & \leftrightarrow & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \tau^{-1}\sqrt{-1} & \tau \\ -\tau & 1 + \tau^{-1}\sqrt{-1} \end{bmatrix} \\
 w_{[0:\tau:\tau^{-1}]}^{-1} &: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \tau^{-1} & -\tau \\ -\tau^{-1} & \tau & 1 \\ \tau & 1 & -\tau^{-1} \end{pmatrix} & \leftrightarrow & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \tau^{-1}\sqrt{-1} & -\tau \\ \tau & 1 - \tau^{-1}\sqrt{-1} \end{bmatrix} \\
 w_{[0:\tau:-\tau^{-1}]} &: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\tau^{-1} & -\tau \\ \tau^{-1} & \tau & -1 \\ \tau & -1 & -\tau^{-1} \end{pmatrix} & \leftrightarrow & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \tau^{-1}\sqrt{-1} & \tau \\ -\tau & 1 - \tau^{-1}\sqrt{-1} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_{[0:\tau:-\tau^{-1}]}^{-1} &: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \tau^{-1} & \tau \\ -\tau^{-1} & \tau & -1 \\ -\tau & -1 & -\tau^{-1} \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \tau^{-1}\sqrt{-1} & -\tau \\ \tau & 1 + \tau^{-1}\sqrt{-1} \end{bmatrix} \\
w_{[\tau^{-1}:0:\tau]} &: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau^{-1} & -\tau & 1 \\ \tau & -1 & -\tau^{-1} \\ 1 & \tau^{-1} & \tau \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \tau\sqrt{-1} & -\tau^{-1}\sqrt{-1} \\ -\tau^{-1}\sqrt{-1} & 1 + \tau\sqrt{-1} \end{bmatrix} \\
w_{[\tau^{-1}:0:\tau]}^{-1} &: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau^{-1} & \tau & 1 \\ -\tau & -1 & \tau^{-1} \\ 1 & -\tau^{-1} & \tau \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \tau\sqrt{-1} & \tau^{-1}\sqrt{-1} \\ \tau^{-1}\sqrt{-1} & 1 - \tau\sqrt{-1} \end{bmatrix} \\
w_{[-\tau^{-1}:0:\tau]} &: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau^{-1} & -\tau & -1 \\ \tau & -1 & \tau^{-1} \\ -1 & -\tau^{-1} & \tau \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \tau\sqrt{-1} & \tau^{-1}\sqrt{-1} \\ \tau^{-1}\sqrt{-1} & 1 + \tau\sqrt{-1} \end{bmatrix} \\
w_{[-\tau^{-1}:0:\tau]}^{-1} &: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau^{-1} & \tau & -1 \\ -\tau & -1 & -\tau^{-1} \\ -1 & \tau^{-1} & \tau \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \tau\sqrt{-1} & -\tau^{-1}\sqrt{-1} \\ -\tau^{-1}\sqrt{-1} & 1 - \tau\sqrt{-1} \end{bmatrix} \\
w_{[\tau:\tau^{-1}:0]} &: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau & 1 & \tau^{-1} \\ 1 & -\tau^{-1} & -\tau \\ -\tau^{-1} & \tau & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \tau^{-1} - \tau\sqrt{-1} \\ -\tau^{-1} - \tau\sqrt{-1} & 1 \end{bmatrix} \\
w_{[\tau:\tau^{-1}:0]}^{-1} &: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau & 1 & -\tau^{-1} \\ 1 & -\tau^{-1} & \tau \\ \tau^{-1} & -\tau & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\tau^{-1} + \tau\sqrt{-1} \\ \tau^{-1} + \tau\sqrt{-1} & 1 \end{bmatrix} \\
w_{[\tau:-\tau^{-1}:0]} &: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau & -1 & -\tau^{-1} \\ -1 & -\tau^{-1} & -\tau \\ \tau^{-1} & \tau & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\tau^{-1} - \tau\sqrt{-1} \\ \tau^{-1} - \tau\sqrt{-1} & 1 \end{bmatrix} \\
w_{[\tau:-\tau^{-1}:0]}^{-1} &: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau & -1 & \tau^{-1} \\ -1 & -\tau^{-1} & \tau \\ -\tau^{-1} & -\tau & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \tau^{-1} + \tau\sqrt{-1} \\ -\tau^{-1} + \tau\sqrt{-1} & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

求められたユニタリ行列の成分は,



$\frac{1}{2}(m_1 + n_1\tau + (m_2 + n_2\tau)\sqrt{-1}), \quad (m_j, n_j \in \mathbb{Z} \quad (j = 1, 2))$   
 の形となっていることが確認できる。

### 2.3 表示行列の固有値と固有ベクトル

前節で求めた表示行列の固有値, 固有ベクトルをまとめておく。変換に関して, 固有値は位数, 固有ベクトルは固定点に関する情報を与える。

行 列	固有値	固有ベクトル
$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau & 1 - \tau^{-1}\sqrt{-1} \\ -1 - \tau^{-1}\sqrt{-1} & \tau \end{bmatrix}$	$e^{\frac{\pi}{5}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} 1 + \tau\sqrt{-1} \\ -\sqrt{2+\tau} \end{bmatrix}$
	$e^{-\frac{\pi}{5}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} 1 + \tau\sqrt{-1} \\ \sqrt{2+\tau} \end{bmatrix}$
$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau^{-1} & \tau - \sqrt{-1} \\ -\tau - \sqrt{-1} & \tau^{-1} \end{bmatrix}$	$e^{\frac{2\pi}{5}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} 1 + \tau\sqrt{-1} \\ -\sqrt{2+\tau} \end{bmatrix}$
	$e^{-\frac{2\pi}{5}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} 1 + \tau\sqrt{-1} \\ \sqrt{2+\tau} \end{bmatrix}$
$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau^{-1} & -\tau + \sqrt{-1} \\ \tau + \sqrt{-1} & \tau^{-1} \end{bmatrix}$	$e^{\frac{2\pi}{5}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} 1 + \tau\sqrt{-1} \\ \sqrt{2+\tau} \end{bmatrix}$
	$e^{-\frac{2\pi}{5}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} 1 + \tau\sqrt{-1} \\ -\sqrt{2+\tau} \end{bmatrix}$
$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau & -1 + \tau^{-1}\sqrt{-1} \\ 1 + \tau^{-1}\sqrt{-1} & \tau \end{bmatrix}$	$e^{\frac{\pi}{5}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} 1 + \tau\sqrt{-1} \\ \sqrt{2+\tau} \end{bmatrix}$
	$e^{-\frac{\pi}{5}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} 1 + \tau\sqrt{-1} \\ -\sqrt{2+\tau} \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{lll}
\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau & -1 - \tau^{-1}\sqrt{-1} \\ 1 - \tau^{-1}\sqrt{-1} & \tau \end{bmatrix} & e^{\frac{\pi}{5}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} 1 - \tau\sqrt{-1} \\ -\sqrt{2+\tau} \end{bmatrix} \\
& e^{-\frac{\pi}{5}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} 1 - \tau\sqrt{-1} \\ \sqrt{2+\tau} \end{bmatrix} \\
\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau^{-1} & -\tau - \sqrt{-1} \\ \tau - \sqrt{-1} & \tau^{-1} \end{bmatrix} & e^{\frac{2\pi}{5}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} 1 - \tau\sqrt{-1} \\ -\sqrt{2+\tau} \end{bmatrix} \\
& e^{-\frac{2\pi}{5}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} 1 - \tau\sqrt{-1} \\ \sqrt{2+\tau} \end{bmatrix} \\
\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau^{-1} & \tau + \sqrt{-1} \\ -\tau + \sqrt{-1} & \tau^{-1} \end{bmatrix} & e^{\frac{2\pi}{5}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} 1 - \tau\sqrt{-1} \\ \sqrt{2+\tau} \end{bmatrix} \\
& e^{-\frac{2\pi}{5}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} 1 - \tau\sqrt{-1} \\ -\sqrt{2+\tau} \end{bmatrix} \\
\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau & 1 + \tau^{-1}\sqrt{-1} \\ -1 + \tau^{-1}\sqrt{-1} & \tau \end{bmatrix} & e^{\frac{\pi}{5}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} 1 - \tau\sqrt{-1} \\ \sqrt{2+\tau} \end{bmatrix} \\
& e^{-\frac{\pi}{5}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} 1 - \tau\sqrt{-1} \\ -\sqrt{2+\tau} \end{bmatrix} \\
\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau - \sqrt{-1} & \tau^{-1} \\ -\tau^{-1} & \tau + \sqrt{-1} \end{bmatrix} & e^{\frac{\pi}{5}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} \tau - \sqrt{2+\tau} \\ -\sqrt{-1} \end{bmatrix} \\
& e^{-\frac{\pi}{5}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} \tau + \sqrt{2+\tau} \\ -\sqrt{-1} \end{bmatrix} \\
\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau^{-1} - \tau\sqrt{-1} & 1 \\ -1 & \tau^{-1} + \tau\sqrt{-1} \end{bmatrix} & e^{\frac{2\pi}{5}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} \tau - \sqrt{2+\tau} \\ -\sqrt{-1} \end{bmatrix} \\
& e^{-\frac{2\pi}{5}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} \tau + \sqrt{2+\tau} \\ -\sqrt{-1} \end{bmatrix}
\end{array}$$

$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau^{-1} + \tau\sqrt{-1} & -1 \\ 1 & \tau^{-1} - \tau\sqrt{-1} \end{bmatrix}$	$e^{\frac{2\pi}{5}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} \tau + \sqrt{2+\tau} \\ -\sqrt{-1} \end{bmatrix}$
	$e^{-\frac{2\pi}{5}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} \tau - \sqrt{2+\tau} \\ -\sqrt{-1} \end{bmatrix}$
$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau + \sqrt{-1} & -\tau^{-1} \\ \tau^{-1} & \tau - \sqrt{-1} \end{bmatrix}$	$e^{\frac{\pi}{5}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} \tau + \sqrt{2+\tau} \\ -\sqrt{-1} \end{bmatrix}$
	$e^{-\frac{\pi}{5}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} \tau - \sqrt{2+\tau} \\ -\sqrt{-1} \end{bmatrix}$
$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau + \sqrt{-1} & \tau^{-1} \\ -\tau^{-1} & \tau - \sqrt{-1} \end{bmatrix}$	$e^{\frac{\pi}{5}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} \tau + \sqrt{2+\tau} \\ \sqrt{-1} \end{bmatrix}$
	$e^{-\frac{\pi}{5}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} \tau - \sqrt{2+\tau} \\ \sqrt{-1} \end{bmatrix}$
$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau^{-1} + \tau\sqrt{-1} & 1 \\ -1 & \tau^{-1} - \tau\sqrt{-1} \end{bmatrix}$	$e^{\frac{2\pi}{5}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} \tau + \sqrt{2+\tau} \\ \sqrt{-1} \end{bmatrix}$
	$e^{-\frac{2\pi}{5}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} \tau - \sqrt{2+\tau} \\ \sqrt{-1} \end{bmatrix}$
$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau^{-1} - \tau\sqrt{-1} & -1 \\ 1 & \tau^{-1} + \tau\sqrt{-1} \end{bmatrix}$	$e^{\frac{2\pi}{5}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} \tau - \sqrt{2+\tau} \\ \sqrt{-1} \end{bmatrix}$
	$e^{-\frac{2\pi}{5}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} \tau + \sqrt{2+\tau} \\ \sqrt{-1} \end{bmatrix}$
$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau - \sqrt{-1} & -\tau^{-1} \\ \tau^{-1} & \tau + \sqrt{-1} \end{bmatrix}$	$e^{\frac{\pi}{5}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} \tau - \sqrt{2+\tau} \\ \sqrt{-1} \end{bmatrix}$
	$e^{-\frac{\pi}{5}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} \tau + \sqrt{2+\tau} \\ \sqrt{-1} \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{lll}
\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau - \tau^{-1}\sqrt{-1} & -\sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & \tau + \tau^{-1}\sqrt{-1} \end{bmatrix} & e^{\frac{\pi}{5}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{2+\tau} \\ \tau \end{bmatrix} \\
& e^{-\frac{\pi}{5}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2+\tau} \\ \tau \end{bmatrix} \\
\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau^{-1} - \sqrt{-1} & -\tau\sqrt{-1} \\ -\tau\sqrt{-1} & \tau^{-1} + \sqrt{-1} \end{bmatrix} & e^{\frac{2\pi}{5}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{2+\tau} \\ \tau \end{bmatrix} \\
& e^{-\frac{2\pi}{5}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2+\tau} \\ \tau \end{bmatrix} \\
\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau^{-1} + \sqrt{-1} & \tau\sqrt{-1} \\ \tau\sqrt{-1} & \tau^{-1} - \sqrt{-1} \end{bmatrix} & e^{\frac{2\pi}{5}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2+\tau} \\ \tau \end{bmatrix} \\
& e^{-\frac{2\pi}{5}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{2+\tau} \\ \tau \end{bmatrix} \\
\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau + \tau^{-1}\sqrt{-1} & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & \tau - \tau^{-1}\sqrt{-1} \end{bmatrix} & e^{\frac{\pi}{5}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2+\tau} \\ \tau \end{bmatrix} \\
& e^{-\frac{\pi}{5}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{2+\tau} \\ \tau \end{bmatrix} \\
\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau - \tau^{-1}\sqrt{-1} & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & \tau + \tau^{-1}\sqrt{-1} \end{bmatrix} & e^{\frac{\pi}{5}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{2+\tau} \\ -\tau \end{bmatrix} \\
& e^{-\frac{\pi}{5}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2+\tau} \\ -\tau \end{bmatrix} \\
\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau^{-1} - \sqrt{-1} & \tau\sqrt{-1} \\ \tau\sqrt{-1} & \tau^{-1} + \sqrt{-1} \end{bmatrix} & e^{\frac{2\pi}{5}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{2+\tau} \\ -\tau \end{bmatrix} \\
& e^{-\frac{2\pi}{5}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2+\tau} \\ -\tau \end{bmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau^{-1} + \sqrt{-1} & -\tau\sqrt{-1} \\ -\tau\sqrt{-1} & \tau^{-1} - \sqrt{-1} \end{bmatrix} & e^{\frac{2\pi}{5}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2+\tau} \\ -\tau \end{bmatrix} \\
 & e^{-\frac{2\pi}{5}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{2+\tau} \\ -\tau \end{bmatrix} \\
 \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau + \tau^{-1}\sqrt{-1} & -\sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & \tau - \tau^{-1}\sqrt{-1} \end{bmatrix} & e^{\frac{\pi}{5}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2+\tau} \\ -\tau \end{bmatrix} \\
 & e^{-\frac{\pi}{5}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{2+\tau} \\ -\tau \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{bmatrix} & \sqrt{-1} (= e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}) & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 & -\sqrt{-1} & \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} & \sqrt{-1} & \begin{bmatrix} -\sqrt{-1} \\ 1 \end{bmatrix} \\
 & -\sqrt{-1} & \begin{bmatrix} \sqrt{-1} \\ 1 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{bmatrix} & \sqrt{-1} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 & -\sqrt{-1} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\tau\sqrt{-1} & \tau^{-1} - \sqrt{-1} \\ -\tau^{-1} - \sqrt{-1} & \tau\sqrt{-1} \end{bmatrix} & \sqrt{-1} & \begin{bmatrix} \tau + \sqrt{-1} \\ -(1+3\tau) \end{bmatrix} \\
 & -\sqrt{-1} & \begin{bmatrix} \tau + \sqrt{-1} \\ \tau^{-1} \end{bmatrix}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\tau\sqrt{-1} & -\tau^{-1} + \sqrt{-1} \\ \tau^{-1} + \sqrt{-1} & \tau\sqrt{-1} \end{bmatrix} & \sqrt{-1} & \begin{bmatrix} \tau + \sqrt{-1} \\ 1 + 3\tau \end{bmatrix} \\
& -\sqrt{-1} & \begin{bmatrix} \tau + \sqrt{-1} \\ -\tau^{-1} \end{bmatrix} \\
\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\tau\sqrt{-1} & \tau^{-1} + \sqrt{-1} \\ -\tau^{-1} + \sqrt{-1} & \tau\sqrt{-1} \end{bmatrix} & \sqrt{-1} & \begin{bmatrix} \tau - \sqrt{-1} \\ 1 + 3\tau \end{bmatrix} \\
& -\sqrt{-1} & \begin{bmatrix} \tau - \sqrt{-1} \\ -\tau^{-1} \end{bmatrix} \\
\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\tau\sqrt{-1} & -\tau^{-1} - \sqrt{-1} \\ \tau^{-1} - \sqrt{-1} & \tau\sqrt{-1} \end{bmatrix} & \sqrt{-1} & \begin{bmatrix} \tau - \sqrt{-1} \\ -(1 + 3\tau) \end{bmatrix} \\
& -\sqrt{-1} & \begin{bmatrix} \tau - \sqrt{-1} \\ \tau^{-1} \end{bmatrix} \\
\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau^{-1}\sqrt{-1} & -1 + \tau\sqrt{-1} \\ 1 + \tau\sqrt{-1} & -\tau^{-1}\sqrt{-1} \end{bmatrix} & \sqrt{-1} & \begin{bmatrix} \tau + \sqrt{-1} \\ 3 - \tau \end{bmatrix} \\
& -\sqrt{-1} & \begin{bmatrix} \tau + \sqrt{-1} \\ -(1 + \tau) \end{bmatrix} \\
\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau^{-1}\sqrt{-1} & 1 - \tau\sqrt{-1} \\ -1 - \tau\sqrt{-1} & -\tau^{-1}\sqrt{-1} \end{bmatrix} & \sqrt{-1} & \begin{bmatrix} \tau + \sqrt{-1} \\ -3 + \tau \end{bmatrix} \\
& -\sqrt{-1} & \begin{bmatrix} \tau + \sqrt{-1} \\ 1 + \tau \end{bmatrix} \\
\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau^{-1}\sqrt{-1} & -1 - \tau\sqrt{-1} \\ 1 - \tau\sqrt{-1} & -\tau^{-1}\sqrt{-1} \end{bmatrix} & \sqrt{-1} & \begin{bmatrix} \tau - \sqrt{-1} \\ -3 + \tau \end{bmatrix} \\
& -\sqrt{-1} & \begin{bmatrix} \tau - \sqrt{-1} \\ 1 + \tau \end{bmatrix}
\end{array}$$

$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau^{-1}\sqrt{-1} & 1+\tau\sqrt{-1} \\ -1+\tau\sqrt{-1} & -\tau^{-1}\sqrt{-1} \end{bmatrix}$	$\sqrt{-1}$	$\begin{bmatrix} \tau - \sqrt{-1} \\ 3 - \tau \end{bmatrix}$
	$-\sqrt{-1}$	$\begin{bmatrix} \tau - \sqrt{-1} \\ -(1+\tau) \end{bmatrix}$
$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\sqrt{-1} & \tau - \tau^{-1}\sqrt{-1} \\ -\tau - \tau^{-1}\sqrt{-1} & \sqrt{-1} \end{bmatrix}$	$\sqrt{-1}$	$\begin{bmatrix} \tau^{-1} + \tau\sqrt{-1} \\ -3 \end{bmatrix}$
	$-\sqrt{-1}$	$\begin{bmatrix} \tau^{-1} + \tau\sqrt{-1} \\ 1 \end{bmatrix}$
$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\sqrt{-1} & -\tau + \tau^{-1}\sqrt{-1} \\ \tau + \tau^{-1}\sqrt{-1} & \sqrt{-1} \end{bmatrix}$	$\sqrt{-1}$	$\begin{bmatrix} \tau^{-1} + \tau\sqrt{-1} \\ 3 \end{bmatrix}$
	$-\sqrt{-1}$	$\begin{bmatrix} \tau^{-1} + \tau\sqrt{-1} \\ -1 \end{bmatrix}$
$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\sqrt{-1} & \tau + \tau^{-1}\sqrt{-1} \\ -\tau + \tau^{-1}\sqrt{-1} & \sqrt{-1} \end{bmatrix}$	$\sqrt{-1}$	$\begin{bmatrix} \tau^{-1} - \tau\sqrt{-1} \\ 3 \end{bmatrix}$
	$-\sqrt{-1}$	$\begin{bmatrix} \tau^{-1} - \tau\sqrt{-1} \\ -1 \end{bmatrix}$
$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\sqrt{-1} & -\tau - \tau^{-1}\sqrt{-1} \\ \tau - \tau^{-1}\sqrt{-1} & \sqrt{-1} \end{bmatrix}$	$\sqrt{-1}$	$\begin{bmatrix} \tau^{-1} - \tau\sqrt{-1} \\ -3 \end{bmatrix}$
	$-\sqrt{-1}$	$\begin{bmatrix} \tau^{-1} - \tau\sqrt{-1} \\ 1 \end{bmatrix}$
$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{-1} & 1 - \sqrt{-1} \\ -1 - \sqrt{-1} & 1 + \sqrt{-1} \end{bmatrix}$	$e^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{-1}$	$\begin{bmatrix} 1 + \sqrt{-1} \\ -1 - \sqrt{3} \end{bmatrix}$
	$e^{-\frac{\pi}{3}}\sqrt{-1}$	$\begin{bmatrix} 1 + \sqrt{-1} \\ -1 + \sqrt{3} \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{lll}
\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+\sqrt{-1} & -1+\sqrt{-1} \\ 1+\sqrt{-1} & 1-\sqrt{-1} \end{bmatrix} & e^{\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} 1+\sqrt{-1} \\ -1+\sqrt{3} \end{bmatrix} \\
& e^{-\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} 1+\sqrt{-1} \\ -1-\sqrt{3} \end{bmatrix} \\
\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-\sqrt{-1} & -1+\sqrt{-1} \\ 1+\sqrt{-1} & 1+\sqrt{-1} \end{bmatrix} & e^{\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} 1+\sqrt{-1} \\ 1+\sqrt{3} \end{bmatrix} \\
& e^{-\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} 1+\sqrt{-1} \\ 1-\sqrt{3} \end{bmatrix} \\
\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+\sqrt{-1} & 1-\sqrt{-1} \\ -1-\sqrt{-1} & 1-\sqrt{-1} \end{bmatrix} & e^{\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} 1+\sqrt{-1} \\ 1-\sqrt{3} \end{bmatrix} \\
& e^{-\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} 1+\sqrt{-1} \\ 1+\sqrt{3} \end{bmatrix} \\
\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+\sqrt{-1} & -1-\sqrt{-1} \\ 1-\sqrt{-1} & 1-\sqrt{-1} \end{bmatrix} & e^{\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} 1-\sqrt{-1} \\ 1-\sqrt{3} \end{bmatrix} \\
& e^{-\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} 1-\sqrt{-1} \\ 1+\sqrt{3} \end{bmatrix} \\
\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-\sqrt{-1} & 1+\sqrt{-1} \\ -1+\sqrt{-1} & 1+\sqrt{-1} \end{bmatrix} & e^{\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} 1-\sqrt{-1} \\ 1+\sqrt{3} \end{bmatrix} \\
& e^{-\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} 1-\sqrt{-1} \\ 1-\sqrt{3} \end{bmatrix} \\
\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+\sqrt{-1} & 1+\sqrt{-1} \\ -1+\sqrt{-1} & 1-\sqrt{-1} \end{bmatrix} & e^{\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} 1-\sqrt{-1} \\ -1+\sqrt{3} \end{bmatrix} \\
& e^{-\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} 1-\sqrt{-1} \\ -1-\sqrt{3} \end{bmatrix}
\end{array}$$



$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{-1} & -1 - \sqrt{-1} \\ 1 - \sqrt{-1} & 1 + \sqrt{-1} \end{bmatrix}$	$e^{\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} 1 - \sqrt{-1} \\ -1 - \sqrt{3} \end{bmatrix}$
	$e^{-\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} 1 - \sqrt{-1} \\ -1 + \sqrt{3} \end{bmatrix}$
$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \tau^{-1}\sqrt{-1} & \tau \\ -\tau & 1 + \tau^{-1}\sqrt{-1} \end{bmatrix}$	$e^{\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} 1 - (1 + \sqrt{3})\tau^{-1} \\ -\sqrt{-1} \end{bmatrix}$
	$e^{-\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} 1 - (1 - \sqrt{3})\tau^{-1} \\ -\sqrt{-1} \end{bmatrix}$
$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \tau^{-1}\sqrt{-1} & -\tau \\ \tau & 1 - \tau^{-1}\sqrt{-1} \end{bmatrix}$	$e^{\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} 1 - (1 - \sqrt{3})\tau^{-1} \\ -\sqrt{-1} \end{bmatrix}$
	$e^{-\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} 1 - (1 + \sqrt{3})\tau^{-1} \\ -\sqrt{-1} \end{bmatrix}$
$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \tau^{-1}\sqrt{-1} & \tau \\ -\tau & 1 - \tau^{-1}\sqrt{-1} \end{bmatrix}$	$e^{\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} 1 - (1 - \sqrt{3})\tau^{-1} \\ \sqrt{-1} \end{bmatrix}$
	$e^{-\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} 1 - (1 + \sqrt{3})\tau^{-1} \\ \sqrt{-1} \end{bmatrix}$
$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \tau^{-1}\sqrt{-1} & -\tau \\ \tau & 1 + \tau^{-1}\sqrt{-1} \end{bmatrix}$	$e^{\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} 1 - (1 + \sqrt{3})\tau^{-1} \\ \sqrt{-1} \end{bmatrix}$
	$e^{-\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} 1 - (1 - \sqrt{3})\tau^{-1} \\ \sqrt{-1} \end{bmatrix}$
$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \tau\sqrt{-1} & -\tau^{-1}\sqrt{-1} \\ -\tau^{-1}\sqrt{-1} & 1 + \tau\sqrt{-1} \end{bmatrix}$	$e^{\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} 1 + (1 - \sqrt{3})\tau \\ 1 \end{bmatrix}$
	$e^{-\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} 1 + (1 + \sqrt{3})\tau \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{ccc}
\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \tau\sqrt{-1} & \tau^{-1}\sqrt{-1} \\ \tau^{-1}\sqrt{-1} & 1 - \tau\sqrt{-1} \end{bmatrix} & e^{\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} 1 + (1 + \sqrt{3})\tau \\ 1 \end{bmatrix} \\
& e^{-\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} 1 + (1 - \sqrt{3})\tau \\ 1 \end{bmatrix} \\
\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \tau\sqrt{-1} & \tau^{-1}\sqrt{-1} \\ \tau^{-1}\sqrt{-1} & 1 + \tau\sqrt{-1} \end{bmatrix} & e^{\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} 1 + (1 - \sqrt{3})\tau \\ -1 \end{bmatrix} \\
& e^{-\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} 1 + (1 + \sqrt{3})\tau \\ -1 \end{bmatrix} \\
\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \tau\sqrt{-1} & -\tau^{-1}\sqrt{-1} \\ -\tau^{-1}\sqrt{-1} & 1 - \tau\sqrt{-1} \end{bmatrix} & e^{\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} 1 + (1 + \sqrt{3})\tau \\ -1 \end{bmatrix} \\
& e^{-\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} 1 + (1 - \sqrt{3})\tau \\ -1 \end{bmatrix} \\
\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \tau^{-1} - \tau\sqrt{-1} \\ -\tau^{-1} - \tau\sqrt{-1} & 1 \end{bmatrix} & e^{\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} \tau + \tau^{-1}\sqrt{-1} \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix} \\
& e^{-\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} \tau + \tau^{-1}\sqrt{-1} \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} \\
\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\tau^{-1} + \tau\sqrt{-1} \\ \tau^{-1} + \tau\sqrt{-1} & 1 \end{bmatrix} & e^{\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} \tau + \tau^{-1}\sqrt{-1} \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} \\
& e^{-\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} \tau + \tau^{-1}\sqrt{-1} \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix} \\
\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\tau^{-1} - \tau\sqrt{-1} \\ \tau^{-1} - \tau\sqrt{-1} & 1 \end{bmatrix} & e^{\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} \tau - \tau^{-1}\sqrt{-1} \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix} \\
& e^{-\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}} & \begin{bmatrix} \tau - \tau^{-1}\sqrt{-1} \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}
\end{array}$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \tau^{-1} + \tau\sqrt{-1} \\ -\tau^{-1} + \tau\sqrt{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} e^{\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}} \\ e^{-\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}} \end{matrix} \begin{bmatrix} \tau - \tau^{-1}\sqrt{-1} \\ \sqrt{3} \\ \tau - \tau^{-1}\sqrt{-1} \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

### 3 表示の特徴付

#### 3.1 $\mathbb{Z}[\tau]$ の構造

黄金比の定数  $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  に対し,

$$\mathbb{Z}[\tau] = \{a + b\tau \mid a, b \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$$

を考える。この環について簡単にまとめておく。

$\tau$  は 2 次方程式  $\tau^2 = \tau + 1$  を満たす。特に  $\tau^{-1} = \tau - 1$  である。また  $\mathbb{Z}[\tau]$  の積については,  $a + b\tau, c + d\tau \in \mathbb{Z}[\tau]$  に対し,

$$(a + b\tau)(c + d\tau) = ac + bd + (ad + bc + bd)\tau$$

となる。

$N : \mathbb{Z}[\tau] \rightarrow \mathbb{Z}$  を  $N(a + b\tau) = (a + b\tau)(a + b - b\tau) = a^2 + ab - b^2$  で定義する。 $N(a + b\tau) \neq 0$  のとき  $(a + b\tau)^{-1} = \frac{a + b - b\tau}{N(a + b\tau)}$  より,  $N(a + b\tau) = \pm 1$  ならば,  $a + b\tau \in \mathbb{Z}[\tau]$  は単元となる ( $(a + b\tau)^{-1} \in \mathbb{Z}[\tau]$ )。また,  $N((a + b\tau)(c + d\tau)) = N(a + b\tau)N(c + d\tau)$  が成り立ち,  $a + b\tau \in \mathbb{Z}[\tau]$  が単元ならば,  $N(a + b\tau) = \pm 1$  となっている。

前節で求めた行列の成分や固有ベクトルの中に現れている表示に関連し, 有用な関係式について整理しておく。

- $5 = (1 - 2\tau)^2 = (2 + \tau)(3 - \tau) = (1 + 3\tau)(-4 + 3\tau)$
- $\tau^2 + \tau^{-2} = 3$

$$\begin{aligned} \bullet \cos \frac{\pi}{5} &= \frac{\tau}{2}, & \sin \frac{\pi}{5} &= \frac{\sqrt{3-\tau}}{2} \\ \bullet \cos \frac{2\pi}{5} &= \frac{\tau^{-1}}{2}, & \sin \frac{2\pi}{5} &= \frac{\sqrt{2+\tau}}{2} \end{aligned}$$

### 3.2 $\left(\frac{1}{2}\mathbb{Z}[\tau] + \frac{1}{2}\mathbb{Z}[\tau]\sqrt{-1}\right)^2$ の単位ベクトル

$$\frac{1}{2}\mathbb{Z}[\tau] = \left\{ \frac{1}{2}(m+n\tau) \mid m, n \in \mathbb{Z} \right\} = \frac{1}{2}(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau)$$

と表記することにする。前節に示したように  $PSU(2)$  での表示行列の成分は,

$$\left\{ \alpha + \beta\sqrt{-1} \mid \alpha, \beta \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}[\tau] \right\} = \frac{1}{2}\mathbb{Z}[\tau] + \frac{1}{2}\mathbb{Z}[\tau]\sqrt{-1}$$

の中に求めることができる。また、表示行列はユニタリ行列であるので、各行を形作るベクトルのユニタリ計量での長さは 1 となっている。

[2] の 命題 4.1 と同様にして、以下の命題を証明することができる。

命題  $v = (\alpha_1 + \beta_1\sqrt{-1}, \alpha_2 + \beta_2\sqrt{-1}) \in \left(\frac{1}{2}\mathbb{Z}[\tau] + \frac{1}{2}\mathbb{Z}[\tau]\sqrt{-1}\right)^2$  に対し、ユニタリ計量による長さ  $\|v\| = 1$  となる条件は

$$\begin{aligned} (\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) \in & \left\{ (\pm 1, 0, 0, 0), \quad (0, \pm 1, 0, 0), \right. \\ & (0, 0, \pm 1, 0), \quad (0, 0, 0, \pm 1), \quad \frac{1}{2}(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1), \\ & \frac{1}{2}(0, \pm 1, \pm \tau, \pm \tau^{-1}), \quad \frac{1}{2}(0, \pm 1, \pm \tau^{-1}, \pm \tau), \quad \frac{1}{2}(0, \pm \tau, \pm 1, \pm \tau^{-1}), \\ & \frac{1}{2}(0, \pm \tau, \pm \tau^{-1}, \pm 1), \quad \frac{1}{2}(0, \pm \tau^{-1}, \pm 1, \pm \tau), \quad \frac{1}{2}(0, \pm \tau^{-1}, \pm \tau, \pm 1), \\ & \frac{1}{2}(\pm 1, 0, \pm \tau, \pm \tau^{-1}), \quad \frac{1}{2}(\pm 1, 0, \pm \tau^{-1}, \pm \tau), \quad \frac{1}{2}(\pm 1, \pm \tau, 0, \pm \tau^{-1}), \\ & \frac{1}{2}(\pm 1, \pm \tau, \pm \tau^{-1}, 0), \quad \frac{1}{2}(\pm 1, \pm \tau^{-1}, 0, \pm \tau), \quad \frac{1}{2}(\pm 1, \pm \tau^{-1}, \pm \tau, 0), \\ & \frac{1}{2}(\pm \tau, 0, \pm 1, \pm \tau^{-1}), \quad \frac{1}{2}(\pm \tau, 0, \pm \tau^{-1}, \pm 1), \quad \frac{1}{2}(\pm \tau, \pm 1, 0, \pm \tau^{-1}), \\ & \frac{1}{2}(\pm \tau, \pm 1, \pm \tau^{-1}, 0), \quad \frac{1}{2}(\pm \tau, \pm \tau^{-1}, 0, \pm 1), \quad \frac{1}{2}(\pm \tau, \pm \tau^{-1}, \pm 1, 0), \\ & \left. \frac{1}{2}(\pm \tau^{-1}, 0, \pm 1, \pm \tau), \quad \frac{1}{2}(\pm \tau^{-1}, 0, \pm \tau, \pm 1), \quad \frac{1}{2}(\pm \tau^{-1}, \pm 1, 0, \pm \tau), \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}(\pm\tau^{-1}, \pm 1, \pm\tau, 0), \quad \frac{1}{2}(\pm\tau^{-1}, \pm\tau, 0, \pm 1), \quad \frac{1}{2}(\pm\tau^{-1}, \pm\tau, \pm 1, 0) \}$$

となることである。ただし、すべての複号は任意とする。

この集合の要素数は 216 であるが、符号の自由度を考慮するとユニタリ行列の成分として考慮すべきものはその半分の 108 個である。これらのベクトルがすべて  $p(I)$  の表示行列に現れる訳ではなく、合同変換の対象となる正 20 面体の配置、「向き」を確認し、該当するものを選び出す必要がある。

### 3.3 表示行列の特徴付

前節で求めたベクトルには正 20 面体群  $I$  に対応するものだけでなく、[2] の 4.2 節で取り上げた  $\bar{I} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} I \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  に関するものも含まれている。正 20 面体群  $I$  の回転に関係するベクトルを符号の重複を除いて選び出すと以下のリストを得る。

$$\begin{aligned} (1, 0), & \quad (\sqrt{-1}, 0), \\ (0, 1), & \quad (0, \sqrt{-1}), \\ \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-1}, \pm 1 \pm \sqrt{-1}), & \\ \frac{1}{2}(1, \pm \tau^{-1} \pm \tau\sqrt{-1}), & \quad \frac{1}{2}(-\sqrt{-1}, \pm \tau \pm \tau^{-1}\sqrt{-1}), \\ \frac{1}{2}(\tau, \pm 1 \pm \tau^{-1}\sqrt{-1}), & \quad \frac{1}{2}(\tau^{-1}, \pm \tau \pm \sqrt{-1}), \\ \frac{1}{2}(-\tau\sqrt{-1}, \pm \tau^{-1} \pm \sqrt{-1}), & \quad \frac{1}{2}(\tau^{-1}\sqrt{-1}, \pm 1 \pm \tau\sqrt{-1}), \\ \frac{1}{2}(1 \pm \tau\sqrt{-1}, \pm \tau^{-1}\sqrt{-1}), & \quad \frac{1}{2}(1 \pm \tau^{-1}\sqrt{-1}, \pm \tau), \\ \frac{1}{2}(\tau \pm \sqrt{-1}, \pm \tau^{-1}), & \quad \frac{1}{2}(\tau \pm \tau^{-1}\sqrt{-1}, \pm \sqrt{-1}), \\ \frac{1}{2}(\tau^{-1} \pm \sqrt{-1}, \pm \tau\sqrt{-1}), & \quad \frac{1}{2}(\tau^{-1} \pm \tau\sqrt{-1}, \pm 1) \end{aligned}$$

(複号任意)

2 次特殊ユニタリ行列は 1 つの行ベクトルで決定されるので、以上の 60 個のベクトルと正 20 面体群の個々の表示行列が 1 対 1 に対応することになる。

残り 48 個は  $\bar{I} \setminus I$  の回転に関係するもので、選び出したベクトルの中で表示に  $\tau$  を含むものに対し、第 2 成分を  $\sqrt{-1}$  倍した形となっている点を注意しておく。

以上により、次の結論を得る。

定理 正 20 面体群  $I$  の  $p: SO(3) \rightarrow PSU(2)$  による像の表示行列は、

$$SU(2) \cap SL \left( 2, \frac{1}{2} \mathbb{Z}[\tau] + \frac{1}{2} \mathbb{Z}[\tau] \sqrt{-1} \right)$$

に含まれる。より詳しくは、

$$\begin{aligned} p(I) &\subset p(I) \cup p(\bar{I}) \\ &= \left( SU(2) \cap SL \left( 2, \frac{1}{2} \mathbb{Z}[\tau] + \frac{1}{2} \mathbb{Z}[\tau] \sqrt{-1} \right) \right) / \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

となっている。

## 参考文献

- [1] 北川 正一, 正 8 面体の構造, 九州国際大学教養研究 第 16 巻 第 2 号 (2009 年 12 月)
- [2] 北川 正一, 正 20 面体の構造, 九州国際大学教養研究 第 16 巻 第 3 号 (2010 年 3 月)
- [3] 北川 正一, 正多面体群の  $PSU(2)$  における構成 (I), 九州国際大学教養研究 第 17 巻 第 1・2 合併号 (2010 年 12 月)